– I –

$\mathbb{R}[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on désigne par E le sous–espace de $\mathbb{R}[X]$ ayant pour éléments les polynômes P tels que :

$$\int_0^1 P(x)\ dx = 0$$

On appellera D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme P sa dérivée P', et d la restriction de D à E.

a) 1) Montrer que d est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. On désignera par ϕ l'isomorphisme réciproque : $\phi = d^{(-1)}$.

2) Vérifier que pour tout élément Q de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = \phi(Q)$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad P(x) = \int_0^x Q(t)\ dt + \int_0^1 (t-1)\ Q(t)\ dt \ .$$

b) On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad , \quad B_{n+1} = \phi\ (B_n) \ .$$

1) Expliciter B_1 et B_2.

2) Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $B_n(0) = B_n(1)$.

c) A tout n de $\mathbb{N}$ on associe le polynôme P_n défini par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad P_n(x) = (-1)^n\ B_n(1-x) \ .$$

1) Pour tout n non nul exprimer P'_{n+1}, en fonction de P_n.

2) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_{n+1} = \phi\ (P_n)$.

3) En déduire l'expression de $B_n\ (1-x)$ en fonction de $B_n\ (x)$.

d) Dans cette question, p est un entier naturel non nul. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right) = Q_n\ (x) \ .$$

1) Montrer que : $Q_{n+1} = \phi\ (Q_n)$.

2) En déduire que l'on a, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad B_n(x) = p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right) \ .$$

e) A tout n de $\mathbb{N}$ on associe le polynôme R_n défini par :

$$R_n = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) .$$

1) Démontrer que l'on a pour tout n : $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\,dt$.

2) Déterminer le polynôme R_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3) En déduire que, pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs on a :

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n!\,(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1)) .$$

– II –

Les notations restant celles de la partie I, on pose : $B_n(0) = b_n$.

a)

1) Démontrer que l'on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{x^j}{j!}$.

2) En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad b_n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} , \text{ avec } b_0 = 1 .$$

3) Montrer que, pour tout k entier naturel, on a $b_{2k+1} = 0$.

$k \geqslant 1$

b) Utilisant le résultat de I.d), donner les expressions en fonction n et b_n de :

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad B_n\left(\frac{1}{3}\right) \quad ; \quad B_n\left(\frac{1}{4}\right) \quad ; \quad B_n\left(\frac{1}{6}\right) .$$

c) On se propose de démontrer que, pour tout entier m strictement positif B_{2m} a exactement un zéro sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, que l'on appellera θ_m .

1) Vérifier qu'il existe dans $\mathbb{N}^*$ au moins un nombre m tel que la fonction $x \mapsto (-1)^m B_{2m-1}(x)$ soit strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

2) Soit m un tel nombre. Etudier les variations de $(-1)^m B_{2m}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et déterminer le nombre des zéros de B_{2m} sur cet intervalle.

3) De cette étude déduire que $(-1)^{m+1} B_{2m+1}(x)$ est strictement positif sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

4) Justifier alors la proposition énoncée au début de la question.

5) Vérifier que, quel que soit m, θ_m appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right[$.

d)

1) Calculer pour tout m la borne supérieure de $|B_{2m}(x)|$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2) En déduire que : $\sup_{[0,1]} |B_{2m}(x)| = |b_{2m}|$.

– III –

Pour tout polynôme P, on désignera par $\bar{P}$ la fonction périodique de période 1 telle que :

$\forall x \in]0, 1[$, $\bar{P}(x) = P(x)$ et $\bar{P}(0) = \frac{1}{2}(P(0) + P(1))$.

a) Montrer que $\bar{P}(x)$ est développable en série de Fourier sous la forme :

$$\bar{P}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi x + \beta_k \sin 2k\pi x) ,$$

a_0, a_k, β_k étant les coefficients de Fourier, dont on donnera les expressions respectives sous forme d'intégrales.

b) Utilisant certains résultats obtenus dans la partie I :

1) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\bar{B}_{2n}$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, que $\bar{B}_{2n-1}$ est impaire et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ si n est supérieur ou égal à 2.

c) Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\int_0^1 B_{2n}(x) \cos 2k\pi x \, dx = I_k(n) .$$

1) Donner la valeur de $I_0(n)$.

2) Trouver une relation de récurrence entre $I_k(n+1)$ et $I_k(n)$.

3) Calculer $I_k(1)$.

4) Montrer alors que l'on a, pour tout x de $[0, 1]$: $B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n}} \cos 2k\pi x$.

5) En déduire l'expression en fonction de n et b_n de la somme : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$.

d) 1) Trouver, grâce à un encadrement judicieux, la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2n}.$$

2) En déduire que pour n infiniment grand on a :

$$b_{2n} \sim 2 \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} .$$

3) Calculer, pour tout $x \in [0, 1]$, la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)}.$$

e)

1) Calculer le développement en série de Fourier de $\tilde{B}_1$.

2) Démontrer sans nouveau calcul d'intégrale que, pour n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad B_{2n-1}(x) = 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n-1}} \sin 2k\pi x .$$

– IV –

Dans cette partie f désigne une fonction définie sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{2n}$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) Pour tout k appartenant à l'intervalle $[\![1, n]\!]$ de $\mathbb{N}$ on pose :

$$\int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k}(0)) f^{(2k)}(t)\, dt = J_k$$

1) Exprimer l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t)\, dt$$

en fonction de J_1, $f(1)$ et $f(0)$.

2) Montrer que pour tout k supérieur ou égal à 2 on a :

$$J_k - J_{k-1} = b_{2k-2}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right)$$

3) Justifier alors l'égalité suivante :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) - \sum_{j=1}^{n} b_{2j}\left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right) + \int_0^1 \left(B_{2n}(t) - B_{2n}(0)\right) f^{(2n)}(t)\,dt$$

b) Application au cas où $f(t) = e^{at}$, ou a est un nombre complexe donné, tel que $|a| < 2\pi$.

1) Appliquant à cette fonction l'égalité établie dans la question précédente, vérifier que :

$$\frac{a}{2}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\,a^{2j} + \varrho_n(a)$$

où

$$\varrho_n(a) = \frac{-a^{2n+1}}{e^a-1}\int_0^1 e^{at}\,(B_{2n}(t) - b_{2n})\,dt$$

2) Utilisant l'équivalence établie dans III.d.2), montrer que si $|a| < 2\pi$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n(a) = 0 \quad .$$

En déduire que pour tout a de module strictement inférieur à 2π on a :

$$\frac{a}{2}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j}\,a^{2j} \quad .$$

c) Utilisant ce résultat, trouver le développement en série entière en x sur $]-\pi,\pi[$ de la fonction :

$$x \mapsto x \operatorname{cotan} x\,.$$

prolongée par continuité en 0.